

Definicja potęgowania.

Porównaliśmy iżდეć od klasycznej definicji działania matematycznego, aby obejmowała wszystkie przypadki, w których to działanie stosujemy. Wzle powszechnie dziś przyjętej, definicji potęgowania podnieść pewną liczbę do jakiejś potęgi, możemy zasadę potęgowa wiać tyle razy, jako czynnik, ile jednostek zawiera wykładnik potęgowy. Ta definicja jednak nie czyni za dość naszymu pojęciemu postulatu, gdyż obejmuje tylko przypadki potęgowania, w których wykładnik potęgowy jest liczbą dodatnią, a w innych przypadkach potęgowania bądź prowadzi nas do mylnego wyniku, a mianowicie wtedy, gdy wykładnik jest ujemny, bądź zarodzi nas, gdy na jej podstawie chcemy się dowiedzieć o wyniku potęgowania, w którym wykładnik potęgowy jest liczbą ujemną. Stosownie bowiem do tej definicji potęgowania podnieść 3 do drugiej potęgi, mamy 3 wziąć dwa razy

jako czynnik t.m. $3 \cdot 3 = 9$, lecz podnieść 3 do zerowej potęgi, znaczący
 nie wisć liczby 3 ani raz jako czynnik, z czego wynikałoby,
 że $3^0 = 0$, gdy tymczasem $3^0 = 1$, bo $3^0 = 3^{2-2} = \frac{3^2}{3^2} = 1$. Roznieś
 inną drogą, a nie z tej definicji potęgowania dowiadujemy się
 o wyniku, podnosząc jakąś liczbę do ujemnej potęgi.

Pomyśle należy definicji potęgowania sniślną, gdy wpro-
 wadzimy do niej pewną modyfikację, a mianowicie taką, że po-
 wiemy: podnieść pewną liczbę do jakiejś potęgi, znaczący jednoś
 tyle razy pomnożyć lub podzielić przez parady potęgony, ile
 wskazuje wykładnik potęgony, i to pomnożyć wtedy, gdy wyka-
 dnik potęgony jest liczbą dodatnią, podzielić zaś wtedy, gdy
 wykładnik jest liczbą ujemną. Proponowana definicja potę-
 gowania ma tę wyśroć nad dotychczasową definicję, że nie
 tylko obejmuje wypadki potęgowania o wykładniku dodatnim,
 jak temta, lecz także obejmuje wypadki potęgowania o wy-
 kładniku zerowym i ujemnym, których temta nie uwzględ-
 nia, gdyż stosownie do niej podnieść 3 do drugiej potęgi

mały 1 pomnożyć dwa razy przez 3 t. m. $1 \cdot \underset{1}{3} \cdot \underset{2}{3} = 9$, mało by,
niekiedy i niej bezpośrednio, że podnieść 3 do zerowej potęgi, ma-
my nie pomnożyć jedności ani razu przez 3, że więc porostaje liczba
1, jako pynik, a dalej, że n. p. $3^{-2} = (1 \cdot \underset{1}{3}) \cdot \underset{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Proponowana definicja potęgowania nie może popaść
w kolizję z już uwanymi twierdzeniami matematycznymi, bo różni się
od dotychczasowej tylko tym, że więc potęgowanie o wykładniku
ujemnym i zerowym i potęgowaniem o wykładniku dodatnim,
sprawdza się jako czynnik liczby 1 przy dodatnich potęgach;
mówimy zaś zawsze pomnożyć sobie jakkolwiek liczbę, pomno-
żoną przez liczbę 1, nie obawiając się o to, by jej wartość ule-
gła skutek tego jedynie zmianie.

Wobec proponowanej definicji mnoż + przy wykładniku
potęgowym oznacza, że mamy pomnożyć liczbę 1 odpowiednią ilość
razy przez zasadę potęgowa, gdy natomiast mnoż - przy wykładni-
ku powiada nam, że mamy podzielić liczbę 1 odpowiednią ilość ra-
zy przez zasadę potęgowa. Będziemy się starali w ten sposób po-

jąc wszystkie badania arytmetyczne, aby stędo nie podołanym,
 se snadi + i- przy liczbach, określających bliżej nasnowone dzie-
 danie, nie spełniają w potęgowaniu jakiejś myślowej, odmien-
 nej niż w innych badaniach, funkcji. Dodawaniem (objęmo-
 waniem) nazywać będziemy taką czynność umysłową, dzięki któ-
 rej przechodzimy od jednej liczby, dla której prowadzamy w dodawaniu
 naszą dodatkę, (którą będziemy nazywać w odjęciu objęmną) do no-
 wej liczby, którą będziemy nazywać sumą (równicą), w ten sposób, że
 tylekrotnie dodajemy do dodatkę (odliczamy od objęmej) jedno-
 stek, ile wskazuje dodatkę [może być ich więcej] (objęmiok). Ktoś
 niem zaś będziemy nazywać taką czynność umysłową, dzięki której
 przechodzimy od jednej liczby, którą nazywamy mnożną, do no-
 wej liczby, którą będziemy nazywać iloczynem, w ten sposób, że mno-
 żną dodajemy do 0 lub odjmujemy od 0 tyle razy, ile wskazuje
 mnożnik. Pocz potęgowanie można będziemy rozumieć taką czynność
 umysłową, dzięki której przechodzimy od jednej liczby, swojej zasadę
 potęgowa, do nowej liczby, swojej potęgi, w ten sposób, że liczbę 1

mnogim lub wielkim tyle razy przez przesadę potęgowa, ile wykonuje
 wybadnik potęgowy. Trzy razy odróżnia nam to oznaczenie, które
 mamy wykonać, aby przejść od jadkiej liczby do nowej liczby: 1) ga-
 tunek działania mnożenia albo jądki przególny ma (przy mno-
 żeniu kropka, przy dzieleniu dwie kropki: , przy pierwiastko-
 waniu $\sqrt{\quad}$, przy logarytmowaniu „log”) albo sposób napisania
 n. p. napisanie jednej liczby se drugą mnożenia dodawanie (odejmowa-
 nie), przyciem poprzeczką liczba nowa maż dodanej (odjemnej), a
 następująca nie się dodawaniem (odjemnością), a napisanie
 liczby mażej u góry przy pierwszej liczbie (n. p. 3^2) mnożenia potę-
 gowanie, przyciem umiemy się mnożyć liczbę niekiedy zaso-
 de potęgowa, a mniejsze wybadnik. Książki są też gatun-
 nek działania jest n - drożym [gdzie n jest równe co do warto-
 ści liczbie, bliżej odnośny gatunek działania odróżniający t. j.
 dodawaniem (odjemnością przy odejmowaniu), mno-
 żeniem przy mnożeniu, wybadnikowi przy potęgowaniu i może
 przybrać wartości od 0 do ∞] wykonaniem odpowiedniego pro-

strzegę działania: albo a) działanie pozytywne albo b) działanie
 negatywne. Tak dodanie (odejmowanie) jest n-rodzajem
 a) dodaniem jednostki do dodanej (lub b) odliczeniem je-
 dnostki od ujemnej). Mnożenie zaś jest n-rodzajem albo a) do-
 daniem mnożonej do 0 albo b) odjęciem mnożonej od 0. Potęgowanie
 mnożu należy uważać za n-rodzaj albo a) pomnożenie liczby 1 przez
 potęgę potęgowa albo b) podzielenie liczby 1 przez potęgę potęgowa.
 Otóż 2). mamy + i - przy dodajniku (ujemniku), mnożniku, ujem-
 niku potęgowym mówię nam, które z dwóch prostych wie-
 dań pierwszego gatunku działania, określonego jakimś wyrazem,
 mamy wykonać lub sposobem napisania, należy wykonać. Tęsk-
 nowiada nam, że mamy wykonać działanie pozytywne (a), a nad-
 mówi nam, że mamy wykonać działanie negatywne (b). 3) Dodaj-
 nik (ujemnik), mnożnik, ujemnik określa bliżej pierwszy gatu-
 nek działania w ten sposób, że wskazuje, ile razy jakimś z jego
 dwóch prostych działań należy wykonać na dodanej (ujemnej), mno-
 żonej, reszcie potęgowej.

Dodanie do (odjęcie) liczby 4 liczby 2 t. j. dwukrotne do-
liczenie do (odliczenie od) liczby 4 jednostki oznaczamy w ten sposób,
że napiszemy za liczbą 4 liczbę 2, a przed 2 napiszemy znak + (lub -).

$$4 \pm 2 = 4 \underset{1}{\pm 1} \underset{2}{\pm 1}.$$

$$\text{zaś } \pm 2 = 0 \pm 2 = 0 \underset{1}{\pm 1} \underset{2}{\pm 1}.$$

Ponieważ tylko napisanie dodajnika lub odejmnika (odjemnika i od-
jemną) wskazuje, że mamy w danym wyrażeniu wykonać dodanie,
nie (odejmowanie), i ponieważ n-krotne doliczenie jednostki do
pierwej liczby ma szczególną nazwę dodawania, a n-krotne odliczenie
jednostki od pierwszej liczby ma szczególną nazwę odejmowania, gdy
natomiast w innych przypadkach n-krotne wykonanie działania
pozytywnego i n-krotne wykonanie działania negatywnego może
tylko jedną wspólną nazwę, przeto tylko w wypadku dodawania
(odejmowania) nadaje się znakowi +, stojącemu przed dodajnikiem,
a oznaczającemu, że mamy do dodanej doliczyć jednostkę, ma-
jąc znak dodawania, podczas gdy znak - przed odjemnikiem,
oznacza, że mamy od odjemnej odliczyć jednostkę, przez co się

ze znak odejmowania. Jeżeli zaś mamy $4 - (\pm 2)$, to znak - przed nas, aresen mówi, że należy przykonać negatywne działanie (b) t.e. odliczyć jednostkę od 4; stąd dla znaków ze znakiem dodatnim badaniem jest odliczenie jednostki od 4, a negatywnym dodanie jednostki do 4. Znak + ze znakiem, daje nam przykonać dodatnie działanie mówi nam, że należy [dwukrotnie, bo 2 jest odjemnikiem] odliczyć jednostkę od 4, a znak - ze znakiem daje nam przykonać negatywne działanie t.j. [dwukrotnie] doliczyć jednostkę do 4.

Znak + przy mnożeniu wskazuje, że mamy mnożenie do, do 0 [tylekrotnie, ile wskazuje mnożnik]

$$\text{n. p. } (+3) \cdot (+2) = 0 + \underbrace{(+3)}_1 + \underbrace{(+3)}_2 = +6$$

$$(-3) \cdot (+2) = 0 + \underbrace{(-3)}_1 + \underbrace{(-3)}_2 = -6$$

Znak - przy mnożeniu powiada, że mamy odejść mnożenie od 0 [tylekrotnie, ile wskazuje mnożnik]:

$$\text{n. p. } (+3) \cdot (-2) = 0 - \underbrace{(+3)}_1 - \underbrace{(+3)}_2 = -6$$

$$(-3) \cdot (-2) = 0 - \underbrace{(-3)}_1 - \underbrace{(-3)}_2 = +6$$

Ponieważ o potęgowaniu mówiliśmy już na początku, presto po-
wstaje nam jeszcze pytanie, czy przy dzieleniu, pierwiastko-
waniu i logarytmowaniu przednich znaków $+$ i $-$ także mamy, jak w innych
działaniach, funkcję. Otóż podnieść jedną liczbę przez drugą możemy
znaleźć także liczbę, która by pomnożona przez dzielnicę, dała dziel-
ną, czyli, podstawiając pod miejsce mnożenia jego znaczenie, znaleźć
taką liczbę, która by, dodana do $O(a)$ lub odjęta od $O(b)$ dawała
tę, ile wskazuje dzielnicę, dała dzielną. Stąd

$$\text{n. p. } (+6) : (+2) \text{ mamy tyle, co } x \cdot (+2) = +6 \text{ czyli } \underbrace{0+x}_{+2} + \underbrace{x}_{+2} = +6$$

$$(+6) : (-2) \quad " \quad " \quad " \quad x \cdot (-2) = +6 \quad " \quad 0 - \underbrace{x}_{+2} - \underbrace{x}_{+2} = +6$$

A zatem i tu także znak $+$ przy dzielniku, który jest liczbą, bliżej
dzielenie określającą, oznacza, że mamy znaleźć liczbę, która by, do-
dana [przez ilość razy] do $O(a)$, dała dzielną, gdy natomiast
znak $-$ przy dzielniku, należy znaleźć liczbę, która by, odjęta od
 $O(b)$ [tylekrotnie, ile wskazuje dzielnicę] dała dzielną.

Zpierwiastkowac całą pierwszą liczbę, możemy znaleźć taką liczbę,
którąby podniesioną do potęgi, wskazanej przez wykładnik pier-

niesthony, dda liczb piermiesthony, czyli, podstawiwszy pod pojęcie potęgowania jego znaczenie, znaleźć taką liczbę, przez którą pomnożona (a) lub podzielona (b) liczba 1 tylekrotnie, ile podaje wykładnik piermiesthony, ddały liczb piermiesthony:

$$n. p. \sqrt[n]{+9} \text{ znaczy } x^{+2} = +9 \text{ czyli } 1. \underbrace{x}_1. \underbrace{x}_2 = +9.$$

$$\sqrt[n]{+9} \quad " \quad x^{-2} = +9 \quad " \quad (1 \div \underbrace{x}_1) \div \underbrace{x}_2 = +9.$$

Tu więc także przez + przy wykładniku piermiesthony, który jest liczbą, bliżej określając piermiesthony, oznacz, że mamy znaleźć liczbę, przez którą pomnożona (a) [złożoną przez wykładnik piermiesthony, ilość razy] liczba 1, ddały liczb piermiesthony, znak zaś - chce znaleźć liczbę, przez którą, podzielona (b) [tę samą ilość razy] liczba 1, ddały liczb piermiesthony.

Wreszcie logarytmując pewną liczbę, szukamy liczby, do której, wziętej jako wykładnik potęgi, podniesiona potęga logarytmiczna, ddały liczb logarytmiczną, czyli szukamy liczby, pewnej logarytmu, która nam wskaze, ile razy należy pomnożyć (a) lub podzielić (b) liczbę 1 przez potęgę logarytmiczną, by przejść od zasady logarytmicznej

do liczby logarytmowanej, n. p. $\log_{(+3)}(+9)$ jest równy albo $1 + x$ albo $-x$, gdyby zachodził pierwszy wypadek t. w. gdyby $\log_{(+3)}(+9) = +x$

$$\text{wtedy } (+3)^{+x} = +9 \text{ czyli } \underbrace{1}_{+1} \cdot \underbrace{(+3)}_{+2} \cdot \dots \cdot \underbrace{(+3)}_{+x} = +9$$

gdyby zaś zachodził drugi wypadek, t. w. gdyby $\log_{(+3)}(+9) = -x$

$$\text{wtedy } (+3)^{-x} = +9 \text{ czyli } \left\{ \underbrace{1}_{+1} : \underbrace{(+3)}_{+2} \right\} : \dots : \underbrace{(+3)}_{+x} = +9$$

W logarytmowaniu potęg takie będziemy snak + przy logarytmie, który jest liczbą, bliżej określającą logarytmowanie, wtedy, gdy drżki $[x\text{-krotnemu}]$ wykonaniu działania pozytywnego (+) t. j. pomnożeniu liczby 1 przez zasadę logarytmiczną, przechodzimy od zasady logarytmicznej do liczby logarytmowanej, będziemy zaś wtedy snak - przy logarytmie, gdy drżki $[x\text{-krotnemu}]$ wykonaniu działania negatywnego (-) t. j. podzieleniu liczby 1 przez zasadę logarytmiczną, przechodzimy od zasady logarytmicznej do liczby logarytmowanej.

Z tych porównań działań arytmetycznych wynika, że każda liczba wskazuje, ile razy wykonano lub należy wykonać jakiegoś z dwóch prostych działań gatunku działania, bliżej

przez niego określonego [a namacznego albo sposobem jej napisa-
nia, albo jakimś szczególnym znakiem przed nią] i się prowadzi i-
przed liczbami parze pszczyną, które z tych dwóch prostych wie-
dań należy wykonać; a ten sposób pas' pnieka jedyny, pnieka,
na który mogłoby trafić przyjęcie najej proponowanej de-
finicji potęgowania.